Le misconcezioni in aula

Silvia Sbaragli
NRD, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
Facoltà di Scienza della Formazione, Università di Bologna e Bolzano
Alta Scuola Pedagogica, Locarno, Svizzera

Questo articolo è stato oggetto di pubblicazione in:
Sbaragli S. (2006). Le misconcezioni in aula. In: G. Boselli, M. Seganti (eds.). *Dal pensare delle scuole: riforme.* Roma: Armando Editore. 130-139.

1. Introduzione

Questo articolo rappresenta una sintesi del testo Martini e Sbaragli (2005) nel quale viene analizzato in profondità uno dei termini più usati da decenni nella ricerca in Didattica della matematica: la parola "misconcezione" (D'Amore, Sbaragli, 2005). Tale termine viene interpretato in modi diversi da vari Autori e assume il più delle volte connotati semplicemente negativi, come sinonimo di "errore", ma noi a partire dagli anni '90 abbiamo scelto di dare a questa parola un senso più costruttivo ed elaborato: «Una misconcezione è un concetto errato e dunque costituisce genericamente un evento da evitare; essa però non va vista sempre come una situazione del tutto o certamente negativa: non è escluso che per poter raggiungere la costruzione di un concetto, si renda necessario passare attraverso una misconcezione momentanea, ma in corso di sistemazione» (D'Amore, 1999a). Tale proposta semantica del termine "misconcezione" è stata sottoposta per anni a prove di coerenza e di efficacia, che ne hanno rilevato l'importanza e l'utilità dal punto di vista didattico; per questo la riteniamo fondamentale per le nostre successive considerazioni.

2. Un'interpretazione costruttivista dell'idea di misconcezione

Le *immagini* che uno studente si fa dei concetti in alcuni casi possono essere delle vere e proprie misconcezioni, cioè interpretazioni errate delle informazioni ricevute; tali immagini-misconcezioni, essendo in continua evoluzione nella complessa scalata verso la costruzione di un concetto, non

sempre risultano di ostacolo all'apprendimento futuro degli allievi, a meno che esse non diventino forti e stabili *modelli* erronei di un concetto.
Tutto ciò deriva dalla forza e stabilità del modello, caratteristiche che sono di per sé stesse di ostacolo ai futuri apprendimenti, rispetto alla dinamicità e instabilità delle immagini.
Sappiamo come sia difficile per l'allievo costruire un concetto, soprattutto quando il modello che si forma rappresenta solo un'immagine-misconcezione che avrebbe dovuto essere ulteriormente ampliata per riuscire a contemplare i diversi aspetti del concetto stesso.
Dal punto di vista didattico, quando un insegnante propone un'immagine forte, convincente, persistente e in alcuni casi addirittura univoca di un concetto, tale immagine si trasforma in *modello intuitivo* (Fischbein, 1985). Tali modelli rispondono pienamente alle sollecitazioni intuitive e hanno dunque un'accettazione immediata forte; si crea così una sorta di rispondenza diretta tra la situazione proposta ed il concetto matematico che si sta utilizzando. Ma questo modello potrebbe non rispecchiare il sapere matematico chiamato in gioco, generando così un modello erroneo che vincola l'apprendimento futuro. Più "forte" è il modello intuitivo, più difficile è infrangerlo per accomodarlo ad una nuova immagine più comprensiva del concetto.
In questi casi, le misconcezioni, che potrebbero non essere considerate in senso negativo se viste e proposte come momento di passaggio, diventano ostacoli per i successivi apprendimenti, difficili da essere superati. Si tratta allora di non favorire anticipatamente l'insorgere di modelli, in quanto accomodare un modello erroneo trasformandolo in un nuovo modello comprensivo di una diversa situazione non è affatto facile, dato che il modello è per sua stessa natura forte e stabile.
Didatticamente conviene quindi lasciare immagini ancora instabili, in attesa di poter creare modelli adatti e significativi, vicini al Sapere matematico che si vuole raggiungere.

3. Misconcezioni "evitabili" e "inevitabili"

In questi ultimi anni stiamo avviando una prima classificazione delle misconcezioni, osservandone le specifiche particolarità (Sbaragli, 2005). Una prima distinzione riguarda quelle che si sono chiamate misconcezioni "evitabili" e "inevitabili".

Le misconcezioni "evitabili" derivano *direttamente dalla trasposizione didattica del sapere*, in quanto sono, appunto, una diretta conseguenza delle scelte degli insegnanti. Queste misconcezioni dipendono dalla prassi scolastica "minata" da improprie consuetudini proposte dagli insegnanti ai propri allievi. D'altra parte, come afferma Zan (1998): «Si può riconoscere che nella formazione delle convinzioni ha una notevole responsabilità il tipo di insegnamento ricevuto».
In effetti, capita spesso che, a complicare l'apprendimento dei concetti matematici, incidano le decisioni prese dall'insegnante, derivanti dalle proposte della *noosfera* (libri di testo, programmi, riviste, …), di fornire all'allievo giorno dopo giorno, sempre e solo univoche rappresentazioni convenzionali, come nel caso ad esempio degli enti primitivi della geometria (Sbaragli, 2005b), che vengono così accettate ciecamente dall'allievo a causa del *contratto didattico* instaurato in classe e del fenomeno di *scolarizzazione* (D'Amore, 1999b).
Le continue e univoche sollecitazioni fornite dall'insegnante fanno sì che lo studente, o addirittura a volte anche l'insegnante stesso, confonda la rappresentazione proposta con il concetto matematico che si vuole far apprendere: «Lo studente non sa che sta apprendendo segni che stanno per concetti e che dovrebbe invece apprendere concetti; se l'insegnante non ha mai riflettuto su questo punto, crederà che lo studente stia apprendendo concetti, mentre questi sta in realtà "apprendendo" solo a far uso di segni» (D'Amore, 2003).
Ne consegue che occorre didatticamente fare molta attenzione alla scelta, ai contesti ed alle modalità d'uso dei segni che rappresentano il concetto matematico che si vuole far apprendere ai propri allievi; un'attenzione che è spesso sottovalutata o data per scontata. Questo è sostenuto anche da Duval che ribadisce come, presso alcuni studiosi di didattica, si scorge una riduzione del segno ai *simboli convenzionali* che connotano direttamente e isolatamente dei concetti, ma che possono portare a misconcezioni (da noi chiamate "*evitabili*"), dato che diventano rappresentanti unici di un dato concetto in un dato registro. Eppure «(…) il coordinamento di registri è la condizione per la padronanza della comprensione in quanto essa è la condizione per una differenziazione reale tra i concetti matematici e la loro rappresentazione. Costituisce una soglia il cui superamento cambia radicalmente l'attitudine di fronte ad un tipo di attività o ad un dominio (…) Ora, questo coordinamento non ha niente di spontaneo» (Duval, 1995).

Come vedremo negli esempi riportati nel paragrafo seguente, la ripetitività delle rappresentazioni fornite non rappresenta l'unica causa delle misconcezioni "*evitabili*"; queste spesso dipendono dalle rappresentazioni che risultano mal scelte dall'insegnante stesso.

Le misconcezioni "inevitabili" sono quelle che derivano solo *indirettamente dalla trasposizione didattica* effettuata dall'insegnante, in quanto sono una conseguenza dall'esigenza di dover dire e mostrare qualcosa per poter spiegare un concetto.
Tali misconcezioni sono quindi imputabili alla necessità di dover partire da un certo sapere per poter comunicare, sapere iniziale che non potrà mai essere esaustivo dell'intero concetto matematico che si vuol proporre.
In questo caso, le misconcezioni possono essere viste come *inevitabili* momenti di passaggio nella costruzione dei concetti che derivano dalle rappresentazioni che gli insegnanti sono *costretti* a fornire per poter presentare un concetto, rappresentazioni che potrebbero contenere delle "informazioni parassite" rispetto al concetto matematico che si vuole trattare.
Nell'affermare che, nel presentare un concetto, si è *costretti* a fare i conti con rappresentazioni realizzate per mezzo di segni, ossia con la semiotica, stiamo affermando, in linea con il pensiero di Duval (1993), che: *non c'è noetica* (acquisizione concettuale di un oggetto) *senza semiotica* (rappresentazione realizzata per mezzo di segni) e che la semiotica viene assunta come caratteristica necessaria per garantire il primo passo verso la noetica. Detto in altro modo: «In Matematica l'acquisizione concettuale di un oggetto passa necessariamente attraverso l'acquisizione di una o più rappresentazioni semiotiche» (D'Amore, 2003).
Eppure, qualsiasi rappresentazione (un disegno, una frase, un grafico, un modello tridimensionale, …) non avrà mai le caratteristiche concettuali di astrattezza, idealità, perfezione, generalità tipiche della Matematica e questo potrebbe essere la fonte di quelle *misconcezioni* che abbiamo chiamato *inevitabili*.
Tuttavia, dovendo fare i conti con la semiotica di un concetto, potrebbe accadere che lo studente confonda la semiotica con la noetica, associando le caratteristiche peculiari della specifica rappresentazione al concetto stesso: «(…) Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni

semiotiche? L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi *inevitabile*» (Duval, 1993).
L'inevitabilità del passaggio attraverso la semiotica, rende le *misconcezioni* che ne derivano *inevitabili*.

4. Esempi di misconcezioni "inevitabili" e "evitabili"

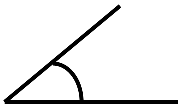
Per rendere più esplicita la distinzione tra misconcezioni "inevitabili" ed "evitabili", riportiamo di seguito alcuni esempi di entrambe le categorie, prestando particolare attenzione alle "evitabili" sulle quali è possibile intervenire didatticamente.

Misconcezioni "inevitabili"
1. Quando un insegnante mostra per la prima volta ad un bambino di scuola dell'infanzia un modello di cubo rosso, di legno, di una certa dimensione e gli dice: «Guarda, questo è un cubo», il bambino potrebbe credere che un cubo deve essere sempre rosso, di legno, di quelle determinate dimensioni. Tutte queste informazioni percettive, che nel contesto della Matematica sono avvertite come "parassite", potrebbero essere invece quelle considerate dall'allievo come caratterizzanti il concetto del quale si sta parlando, essendo più percepibili e immediate.
Inizialmente, quel bambino potrebbe credere che il cubo debba essere rosso, di legno, di quelle determinate dimensioni; tutte caratteristiche che derivano dalla semiotica (l'immagine proposta) e dall'associazione della rappresentazione al concetto. Tali misconcezioni che si possono essere create derivano solo *indirettamente* dalla *trasposizione didattica* effettuata dall'insegnante, in quanto sono una conseguenza dell'esigenza di dover dire e mostrare qualcosa per poter spiegare un concetto.
Ma se l'insegnante avrà in seguito la sensibilità didattica di creare le condizioni per superare queste misconcezioni, mostrando modelli di cubi, non di legno, non rossi, non di quelle dimensioni, per poi fornire nel tempo diverse rappresentazioni in vari registri, il bambino lentamente compirà dei passi in avanti nella costruzione del concetto, ampliando le vecchie immagini-misconcezioni, fino a creare una nuova immagine in grado di contemplare tutte le successive sollecitazioni che gli verranno proposte. Ossia, lentamente lo studente annullerà i tratti distintivi dell'oggetto che non lo caratterizzano dal punto di vista matematico, per puntare l'attenzione su quelli che invece lo rappresentano in questo contesto; in tal modo

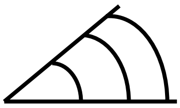
l’insegnante eviterà il formarsi di modelli scorretti nella mente dello studente.
Al contrario, se l’insegnante mostrerà all’allievo sempre la stessa rappresentazione del concetto, senza pensare alle conseguenze che questa sua scelta potrebbe comportare, si potrebbero verificare *ostacoli di natura didattica* (Brousseau, 1983) per il futuro apprendimento. In questo caso tale misconcezione si può considerare “evitabile”.

2. Lo studente ha imparato negli anni a riconoscere il quadrato e il rettangolo tramite sollecitazioni scolastiche ed extra-scolastiche. Un giorno l’insegnante di scuola primaria analizza più a fondo da un punto di vista logico la definizione di quadrato a partire dal rettangolo e mostra come la richiesta che evidenzia la “differenza specifica” tra il “genere prossimo” rettangoli ed il “sottogenere” quadrati riguarda solo la lunghezza dei lati (che devono essere tutti congruenti). Quindi, dopo aver disegnato un quadrato alla lavagna, sostiene che esso è un particolare tipo di rettangolo. La misconcezione che negli anni potrebbe essersi creata nell’allievo, che l’immagine prototipo di rettangolo è una figura che deve avere i lati consecutivi di lunghezze diverse, potrebbe a questo punto creare un conflitto cognitivo con la nuova immagine proposta dall’insegnante. Tale possibile *misconcezione* iniziale è da noi considerata “*inevitabile”*, in quanto dipende dalla necessaria gradualità dell’introduzione dei saperi che, per essere proposti, si devono ancorare a rappresentazioni semiotiche che spesso nascondono la totalità e la complessità del concetto. Risulta in effetti impensabile poter proporre inizialmente tutte le considerazioni necessarie per poter caratterizzare un concetto dal punto di vista matematico e questa scelta obbligata dipende soprattutto dagli *ostacoli ontogenetici* (Brousseau, 1986).

Misconcezioni “evitabili”
1. Durante un esame di Matematica all’Università, presso la Facoltà di Scienze della Formazione Primaria, si è chiesto ad uno studente non frequentante di spiegare che cos’è un angolo.
A questa sollecitazione lo studente risponde:
«Un angolo è la lunghezza dell’arco»
e, dopo aver chiesto se poteva disegnare, lo studente realizza la seguente “classica” rappresentazione che mette in evidenza l’arco che, a suo parere, identifica l’angolo:



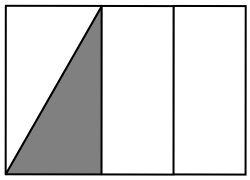
Alla provocatoria sollecitazione del docente:
«Allora, a mano a mano che ti sposti l'angolo diventa sempre più ampio?», supportata dalle seguenti aggiunte al precedente disegno:



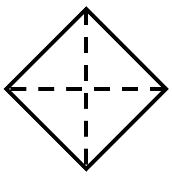
lo studente risponde:
«È vero, non ci avevo mai pensato!»

La continua, univoca e impropria rappresentazione fornita da insegnanti diversi, anno dopo anno, ha dato forza nella mente dello studente a caratteristiche "parassite" della semiotica a sfavore della noetica. Questo ha comportato che l'allievo identificasse quell'"archetto" con l'angolo, confondendo così la rappresentazione fornita con il concetto. L'"archetto" è così diventato l'elemento caratterizzante il concetto proposto e questo ha comportato che lo studente andasse alla ricerca della proprietà che maggiormente lo caratterizza: la sua lunghezza.
In questo caso, la misconcezione che si è creata sembra essere "*evitabile*" in quanto dipende da due diverse cause: la reiterata proposta della stessa rappresentazione, ma anche la scelta della rappresentazione stessa che, meno di altre, rispetta le proprietà del concetto che si vuole far apprendere (la limitatezza dell'archetto contrasta con l'illimitatezza dell'angolo).
Tale esempio rientra nella seguente considerazione di Maier (1993): «In geometria sono molti gli allievi che hanno difficoltà a capire le indicazioni, i problemi e le spiegazioni fornite dall'insegnante o dal manuale, perché le loro concezioni geometriche rimangono strettamente legate alle figure e ai modelli concreti utilizzati come supporti visivi per formare queste concezioni. A mio avviso, questo è dovuto al fatto che i supporti visivi sono spesso utilizzati nelle ore di geometria in una maniera non soddisfacente. A volte i modelli utilizzati sono inadatti a rappresentare la nozione che si tratta e così gli allievi acquisiscono un'idea sbagliata per quanto riguarda il senso del vocabolario geometrico».

2. La parola “*uguale*”. Durante un corso di formazione ad insegnanti di scuola primaria e media, il relatore, dopo aver mostrato la seguente immagine, ha affermato che la parte evidenziata rappresenta ¼ dell’intero. Partendo da questa sollecitazione, la maggioranza degli insegnanti ha mostrato di possedere una forte misconcezione legata alla proposta della noosfera di definire la frazione come divisione di un intero in parti *uguali* (nel senso di *congruenti*). La misconcezione è in questo caso legata all’uso ingenuo e fuorviante del termine *uguale* che non permette di considerare la parte evidenziata come unità frazionaria, in quanto, partendo dalla “definizione” fornita, l’attenzione si concentra esclusivamente sulle forme e dimensioni delle parti da ottenere dall’intero che in questo caso non sono tutte congruenti tra loro. Così facendo, le frazioni non vengono riferite a specifiche proprietà come la lunghezza, la numerosità, l’estensione superficiale (specifica di questo caso), la volumetria, … di un dato intero, ma alla congruenza delle parti (Fandiño Pinilla, 2005; Campolucci et al. 2006).

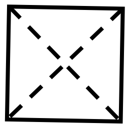


3. L’*istituzionalizzazione* di una scelta.
Durante una sperimentazione in una classe IV di scuola primaria di Mirano (VE) si è presentata la seguente situazione, ampiamente studiata nella letteratura di ricerca in Didattica della matematica. Dopo aver costruito dei fogli quadrati di carta dove si erano anche evidenziate le pieghe in corrispondenza delle diagonali, il ricercatore ha disposto il proprio modello di quadrato nella seguente “inaspettata” posizione rispetto a quella “classica” scelta dai bambini per parlare di quadrato:



A questa provocazione i bambini hanno obbiettato: «Quello che hai in mano tu è un rombo, quello che abbiamo in mano noi è un quadrato».

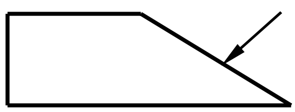
(I bambini tenevano il quadrato disposto nel seguente modo rispetto all'osservatore:



).

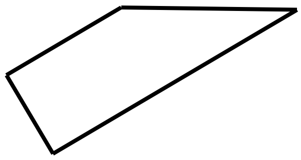
Il ricercatore ha allora sollecitato la discussione domandando loro: «Perché quello che ho in mano io è un rombo e il vostro è un quadrato?».
Bambini: «Perché la maestra ci ha detto che il rombo ha le diagonali orizzontali e verticali, mentre il quadrato ha le diagonali oblique».
Nella logica di ciò che era stato loro insegnato, i bambini avevano ragione: la risposta risultava coerente rispetto all'insegnamento che avevano ricevuto. La rappresentazione e l'indicazione verbale che l'insegnante aveva fornito ai propri allievi, in buona fede, allo scopo di aiutarli, risultava in realtà un ostacolo all'apprendimento, dato che fissava l'attenzione solo su una particolare posizione assunta dall'oggetto. Tale posizione risultava intuitiva per gli allievi, essendo percettivamente immediata, ma celava le caratteristiche matematiche del concetto.
Le *misconcezioni "evitabili"* rilevate in questo caso sembrano dipendere da due diverse cause: la ripetitività della rappresentazione proposta dall'insegnante (che consiste nel quadrato disegnato con i lati orizzontali e verticali rispetto al punto di vista del lettore e che viene proposta dalla noosfera in modo quasi esclusivo) e soprattutto l'*istituzionalizzazione* verbale di tale scelta.

4. Il "*lato obliquo*" del trapezio. Una convenzione accettata da anni dalla noosfera, e per questo presente in tutti i libri di testo, è quella di chiamare il lato del trapezio, indicato nel seguente disegno, con il nome di "lato obliquo".
Questa scelta risulta costruttiva per l'apprendimento degli allievi o fonte di *ostacoli didattici*?



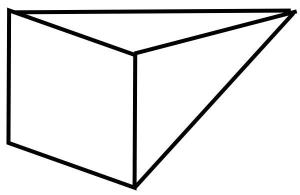
A nostro parere tale scelta crea nella mente degli allievi *misconcezioni "evitabili"*, dato che essa vincola la posizione da far assumere all'oggetto.

Nella seguente figura, che rappresenta lo stesso trapezio ma disposto in modo diverso rispetto ai margini del foglio, tutti i lati risultano obliqui rispetto al lettore, tranne quello che per convenzione è chiamato obliquo. A questo punto lo studente potrebbe non riconoscere più il trapezio o per farlo potrebbe doverlo riportare nella posizione da lui considerata standard: con il lato che è stato etichettato come obliquo disposto in modo che lo sia effettivamente rispetto al proprio punto di vista.



Tali *misconcezioni* sono *"evitabili"* in quanto dipendono dalla scelta linguistica dei termini che da maggiore risalto alla posizione assunta dall'oggetto del quale si sta parlando, piuttosto che all'essenza dell'oggetto stesso, valorizzando così saperi esterni al contesto della Matematica.

5. La parola *"base"* nello spazio. Molti insegnanti, non solo della scuola primaria, introducono la parola "base" nello spazio, affermando che è la faccia sulla quale "appoggia" il solido. Allo stesso tempo, ai solidi vengono dati particolari nomi, derivanti dalla proposta della noosfera, del tipo: "piramide a base quadrata", "prismi a basi triangolari", …
Queste scelte didattiche congiunte possono provocare *misconcezioni "evitabili"*, dato che vincolano la posizione che deve assumere il solido nello spazio. Eppure, ciò che si dovrebbe auspicare in àmbito geometrico è che lo studente riesca ad osservare le proprietà matematiche dell'oggetto, invarianti rispetto alla posizione assunta: «Uno degli obiettivi dell'insegnamento della geometria nella scuola primaria risiede nella costruzione da parte degli allievi di invarianti spaziali fondamentali che servono poi da relazioni di base per la geometria» (La borde, 2004).
Ne consegue che, nella logica di ciò che gli insegnanti intendono per "base" nello spazio e dei termini che vengono comunemente utilizzati per parlare dei poliedri, è possibile giustificare il seguente episodio avvenuto durante una sperimentazione.



In una III media, dopo aver disposto un modello di piramide quadrangolare con una faccia triangolare appoggiata sulla cattedra, si è chiesto di quale

solido si trattava. Una studentessa ha risposto immediatamente: «Non so che cosa sia, ma se lo rigiri diventa una piramide a base quadrata» (intendendo: con la faccia quadrata appoggiata sulla cattedra).
Anche in questo caso la studentessa risulta coerente con ciò che le è stato insegnato: la base è la faccia sulla quale "appoggia" il poliedro, quel solido si chiama "piramide a base quadrata" solo se "appoggia" sulla faccia quadrata. Eppure in Matematica non vi sono piani di "appoggio", ogni faccia può essere considerata come "base", indipendentemente da come è disposta nello spazio. La "base" può essere una qualsiasi faccia sulla quale si presta l'attenzione, così come nel piano, la "base" può essere un qualsiasi lato, comunque disposto rispetto ai margini del foglio o al lettore. Al contrario di quanto siamo portati a credere, la presenza dell'oggetto può esasperare il riferimento a caratteristiche legate alla percezione che causano deformazione.

Bibliografia

Brousseau G. (1983). Ostacles Epistemologiques en Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques.* 4, 2, 165-198.

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques.* 7, 2, 33-115.

Campulucci L., Maori D., Fandiño Pinilla M.I., Sbaragli S. (2006). Cambi di convinzione sulla pratica didattica concernente le frazioni. *La matematica e la sua didattica.* 3, 453-500.

D'Amore B. (1999a). *Elementi di didattica della matematica.* Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (1999b). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 22A, 3, 247-276.

D'Amore B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica.* Bologna: Pitagora.

D'Amore B., Sbaragli S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*. 2, 139-163.

Duval R. (1993). Registres de Répresentations sémiotiques et Fonctionnement cognitif de la Pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives.* 5, 37-65.

Duval R. (1995). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? Actes de l’École d’été 1995. [Trad. it.: *La matematica e la sua didattica.* 3, 1996, 250-269].
Fandiño Pinilla M.I. (2005). *Le frazioni. Aspetti concettuali e didattici*. Bologna: Pitagora.
Fischbein E. (1985). Intuizione e pensiero analitico nell’educazione matematica. In: Chini Artusi L. (ed.). *Numeri e operazioni nella scuola di base.* Bologna: Zanichelli-UMI. 8-19.
Laborde C. (2004). Come la geometria dinamica può rinnovare i processi di mediazione delle conoscenze matematiche nella scuola primaria. In: D’Amore B., Sbaragli S. (eds.). *La Didattica della matematica: una scienza per la scuola.* Atti del XVIII Convegno Nazionale: Incontri con la Matematica. Bologna: Pitagora. 19-28.
Maier H. (1993). Problemi di lingua e di comunicazione durante le lezioni di matematica. *La matematica e la sua didattica.* 1, 69-80.
Martini B., Sbaragli S. (2005). *Insegnare e apprendere la matematica.* Napoli: Tecnodid.
Sbaragli S. (2005a). Misconcezioni “inevitabili” e misconcezioni “evitabili”. *La matematica e la sua didattica.* 1. 57-71.
Sbaragli S. (2005b). L’importanza delle diverse rappresentazioni semiotiche. Il caso degli enti primitivi della geometria. *Bollettino dei Docenti di Matematica.* Bellinzona (Svizzera). 50, 69-76.
Zan R. (1998). *Problemi e convinzioni.* Bologna: Pitagora.